数　学　I

（全　問　必　答）

第１問 （配点　25）

〔１〕 a，b，c は定数で，$a > 0$ とする。関数 $f(x) = ax^2 + bx + c$ が $f(1) = 4$，$f(2) = 9$ を満たすとき

$$b = \boxed{\text{アイ}}\,a + \boxed{\text{ウ}},\quad c = \boxed{\text{エ}}\,a - \boxed{\text{オ}}$$

となる。

このとき，方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ が異なる二つの実数解をもつような a の値の範囲は

$$0 < a < \boxed{\text{カ}},\quad \boxed{\text{キク}} < a$$

である。とくに $a = \dfrac{1}{3}$ のとき，$ax^2 + bx + c = 0$ の解は

$$x = \boxed{\text{ケコ}} \pm \sqrt{\boxed{\text{サシ}}}$$

である。

（数学 I 第１問は次ページに続く。）

〔2〕 整式 $A = 6x^2 + 5xy + y^2 + 2x - y - 20$ を因数分解すると

$$A = \left(\boxed{\text{ス}}\,x + y + \boxed{\text{セ}}\right)\left(\boxed{\text{ソ}}\,x + y - \boxed{\text{タ}}\right)$$

となる。

$x = -1$，$y = \dfrac{2}{3 - \sqrt{7}}$ のとき，A の値は $\boxed{\text{チツテ}}$ である。

第 2 問 (配点　25)

a を定数とし，x の 2 次関数

$$y = 2x^2 - 4(a+1)x + 10a + 1 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

のグラフを G とする。

グラフ G の頂点の座標を a を用いて表すと

$$\left(a + \boxed{\text{ア}},\ \boxed{\text{イウ}}\,a^2 + \boxed{\text{エ}}\,a - \boxed{\text{オ}}\right)$$

である。

(1) グラフ G が x 軸と接するのは

$$a = \frac{\boxed{\text{カ}} \pm \sqrt{\boxed{\text{キ}}}}{\boxed{\text{ク}}}$$

のときである。

(数学 I 第 2 問は次ページに続く。)

(2) 関数①の $-1 \leqq x \leqq 3$ における最小値を m とする。

$$m = \boxed{\text{イウ}}\,a^2 + \boxed{\text{エ}}\,a - \boxed{\text{オ}}$$

となるのは

$$\boxed{\text{ケコ}} \leqq a \leqq \boxed{\text{サ}}$$

のときである。また

$$a < \boxed{\text{ケコ}} \text{ のとき } \quad m = \boxed{\text{シス}}\,a + \boxed{\text{セ}}$$

$$\boxed{\text{サ}} < a \text{ のとき } \quad m = \boxed{\text{ソタ}}\,a + \boxed{\text{チ}}$$

である。

したがって，$m = \dfrac{7}{9}$ となるのは

$$a = \frac{\boxed{\text{ツ}}}{\boxed{\text{テ}}},\ \frac{\boxed{\text{トナ}}}{\boxed{\text{ニ}}}$$

のときである。

第3問 (配点 30)

△ABCにおいて，AB $= 2$，BC $= 2\sqrt{13}$，AC $= 6$ とする。

このとき，∠CAB $=$ $\boxed{\text{アイウ}}^\circ$ であり，△ABCの面積は

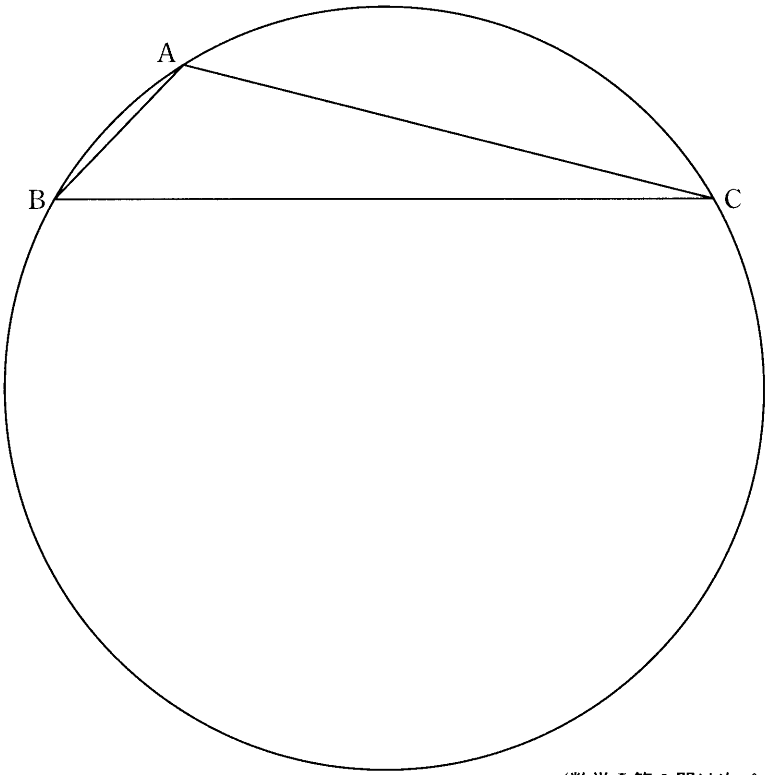
$\boxed{\text{エ}}\sqrt{\boxed{\text{オ}}}$ である。

△ABCの外接円の中心をOとすると

$$\text{OA} = \text{OB} = \frac{\boxed{\text{カ}}\sqrt{\boxed{\text{キク}}}}{\boxed{\text{ケ}}}$$

であるので，辺ABの中点をMとするとOM $= \dfrac{\boxed{\text{コ}}\sqrt{\boxed{\text{サ}}}}{\boxed{\text{シ}}}$ である。

参考図



(数学 I 第3問は次ページに続く。)

次に，辺 AC 上に点 D を AB = AD となるようにとる。△ABD の外接円の中心を O′ とすると

$$\mathrm{O'A} = \mathrm{O'B} = \boxed{\text{ス}}, \qquad \mathrm{O'M} = \sqrt{\boxed{\text{セ}}}$$

である。

したがって

$$\mathrm{OO'} = \frac{\boxed{\text{ソ}}\sqrt{\boxed{\text{タ}}}}{\boxed{\text{チ}}}$$

である。また

$$\tan \angle \mathrm{ODO'} = \frac{\boxed{\text{ツ}}\sqrt{\boxed{\text{テ}}}}{\boxed{\text{ト}}}$$

である。

第４問 （配点　20）

次のような装置がある。$x > 1$ を満たす数 x が書かれた紙をこの装置に入れると，装置は $n \leqq x < n+1$ を満たす整数 n を求め，以下のように作動する。

- $x > n$ のとき，n 個の玉と数 $\dfrac{1}{x-n}$ が書かれた紙を出す
- $x = n$ のとき，n 個の玉を出し，紙は出さない

(1) $\dfrac{27}{8}$ が書かれた紙をこの装置に入れて，出てきた紙をまた装置に入れることを，紙が出てくる限り繰り返す。

$3 \leqq \dfrac{27}{8} < 4$ であるから，１回目には３個の玉と $\dfrac{8}{3}$ が書かれた紙が出てくる。

次に $\dfrac{8}{3}$ が書かれた紙を入れるので，２回目には $\boxed{\text{ア}}$ 個の玉と $\dfrac{\boxed{\text{イ}}}{\boxed{\text{ウ}}}$ が書かれた紙が出てくる。

（数学 I 第４問は次ページに続く。）

(2) $\dfrac{1+\sqrt{10}}{3}$ が書かれた紙をこの装置に入れて，出てきた紙をまた装置に入れることを，紙が出てくる限り繰り返す。

1回目には $\boxed{\text{エ}}$ 個の玉と $\dfrac{\boxed{\text{オ}}+\sqrt{10}}{\boxed{\text{カ}}}$ が書かれた紙が出てくる。

2回目には $\boxed{\text{キ}}$ 個の玉と $\dfrac{\boxed{\text{ク}}+\sqrt{10}}{\boxed{\text{ケ}}}$ が書かれた紙が出てくる。

3回目には $\boxed{\text{コ}}$ 個の玉と $\dfrac{\boxed{\text{サ}}+\sqrt{10}}{\boxed{\text{シ}}}$ が書かれた紙が出てくる。

また，11回目には $\boxed{\text{ス}}$ 個の玉と $\dfrac{\boxed{\text{セ}}+\sqrt{10}}{\boxed{\text{ソ}}}$ が書かれた紙が出てくる。