数　学　I

（全　問　必　答）

第１問　（配点　25）

〔1〕　$a = \dfrac{\sqrt{7}-\sqrt{3}}{\sqrt{7}+\sqrt{3}}$ とする。a の分母を有理化すると

$$a = \frac{\boxed{\text{ア}} - \sqrt{\boxed{\text{イウ}}}}{\boxed{\text{エ}}}$$

となる。

2次方程式 $6x^2 - 7x + 1 = 0$ の解は

$$x = \frac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}},\quad \boxed{\text{キ}}$$

である。

次の⓪～③の数のうち最も小さいものは $\boxed{\text{ク}}$ である。

⓪ $\dfrac{\boxed{\text{ア}} - \sqrt{\boxed{\text{イウ}}}}{\boxed{\text{エ}}}$　　① $\dfrac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{ア}} - \sqrt{\boxed{\text{イウ}}}}$

② $\dfrac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}$　　③ $\boxed{\text{キ}}$

（数学Ｉ第１問は次ページに続く。）

〔2〕 n を整数とし，x の連立不等式

$$\begin{cases} 6x^2 - 11nx + 3n^2 \leqq 0 & \cdots\cdots\cdots\cdots ① \\ |3x - 2n| \geqq 2 & \cdots\cdots\cdots\cdots ② \end{cases}$$

を考える。

① の左辺は

$$6x^2 - 11nx + 3n^2 = \left(\boxed{\text{ケ}}x - n\right)\left(\boxed{\text{コ}}x - \boxed{\text{サ}}n\right)$$

と因数分解される。

$x = 1$ が ① を満たすような整数 n の範囲は

$$\boxed{\text{シ}} \leqq n \leqq \boxed{\text{ス}}$$

である。

$x = 1$ が ② を満たすような整数 n の範囲は

$$n \leqq \boxed{\text{セ}},\quad \boxed{\text{ソ}} \leqq n$$

である。

よって，$x = 1$ が上の連立不等式を満たすとき，$n = \boxed{\text{タ}}$ である。

$n = \boxed{\text{タ}}$ のとき，連立不等式の解は

$$\boxed{\text{チ}} \leqq x \leqq \frac{\boxed{\text{ツ}}}{\boxed{\text{テ}}},\quad \frac{\boxed{\text{ト}}}{\boxed{\text{ナ}}} \leqq x \leqq \frac{\boxed{\text{ニ}}}{\boxed{\text{ヌ}}}$$

である。

第2問 (配点　25)

a，b を実数とし，x の二つの2次関数

$$y = 3x^2 - 2x - 1 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots \text{①}$$

$$y = x^2 + 2ax + b \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots \text{②}$$

のグラフをそれぞれ G_1，G_2 とする。

以下では，G_2 の頂点は G_1 上にあるとする。

このとき

$$b = \boxed{\text{ア}}\,a^2 + \boxed{\text{イ}}\,a - \boxed{\text{ウ}}$$

であり，G_2 の頂点の座標を a を用いて表すと

$$\left(-a,\ \boxed{\text{エ}}\,a^2 + 2a - \boxed{\text{オ}}\right)$$

となる。

(数学Ⅰ第2問は次ページに続く。)

(1) G_2 の頂点の y 座標は，$a = \dfrac{\boxed{\text{カキ}}}{\boxed{\text{ク}}}$ のとき，最小値 $\dfrac{\boxed{\text{ケコ}}}{\boxed{\text{サ}}}$ をとる。

$a = \dfrac{\boxed{\text{カキ}}}{\boxed{\text{ク}}}$ のとき，G_2 の軸は直線 $x = \dfrac{\boxed{\text{シ}}}{\boxed{\text{ス}}}$ であり，G_2 と x 軸との交点の x 座標は

$$\frac{\boxed{\text{セ}} \pm \boxed{\text{ソ}}\sqrt{\boxed{\text{タ}}}}{\boxed{\text{チ}}}$$

である。

(2) G_2 が点$(0, 5)$を通るとき，$a = \boxed{\text{ツ}}$，$\dfrac{\boxed{\text{テト}}}{\boxed{\text{ナ}}}$ である。

$a = \boxed{\text{ツ}}$ のとき，G_2 を x 軸方向に $\boxed{\text{ニ}}$，y 軸方向にも同じく $\boxed{\text{ニ}}$ だけ平行移動しても頂点は G_1 上にある。ただし，$\boxed{\text{ニ}}$ は0でない数とする。

第3問 （配点　30）

$\triangle$ABC において，AB $=\sqrt{5}$，BC $=\sqrt{13}$，CA $=\sqrt{10}$ とする。
このとき

$$\cos\angle\mathrm{BAC}=\frac{\sqrt{\boxed{\text{ア}}}}{\boxed{\text{イウ}}},\qquad \sin\angle\mathrm{BAC}=\frac{\boxed{\text{エ}}\sqrt{\boxed{\text{オ}}}}{\boxed{\text{カキ}}}$$

である。また，$\triangle$ABC の面積は $\dfrac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}}$ である。

(1)　円 O を $\triangle$ABC の外接円とする。円 O の点 A を含まない弧 BC 上に点 S を $\angle$BAS $=45^\circ$ となるようにとる。また，円 O の点 B を含まない弧 AC 上に点 T を $\angle$BCT $=45^\circ$ となるようにとる。

このとき，$\angle$SCT $=\boxed{\text{コサ}}^\circ$ であり，ST $=\dfrac{\boxed{\text{シ}}\sqrt{\boxed{\text{スセ}}}}{\boxed{\text{ソ}}}$ である。

また，BT $=\dfrac{\boxed{\text{タ}}\sqrt{\boxed{\text{チツ}}}}{\boxed{\text{テ}}}$ である。

（数学Ⅰ第3問は次ページに続く。）

(2) △ABC を底面とし P を頂点とする三角錐(すい) PABC を考える。

3 辺 PA, PB, PC が互いに直交しているとき

$$\mathrm{PA} = \boxed{\text{ト}},\quad \mathrm{PB} = \boxed{\text{ナ}},\quad \mathrm{PC} = \boxed{\text{ニ}}$$

である。また，点 P から △ABC に下ろした垂線の長さは $\dfrac{\boxed{\text{ヌ}}}{\boxed{\text{ネ}}}$ である。

第4問 (配点 20)

m, n を自然数とし, $1 < m < n$ とする。

$$\alpha = \sqrt{m} - \sqrt{m-1}, \quad \beta = \sqrt{n} - \sqrt{n-1}$$

とおく。さらに

$$S = \alpha\beta + \frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} + \frac{1}{\alpha\beta}$$

とおく。

(1) $m = 3$, $n = 6$ のとき

$$\alpha + \frac{1}{\alpha} = \boxed{\text{ア}}\sqrt{\boxed{\text{イ}}}, \quad \beta + \frac{1}{\beta} = \boxed{\text{ウ}}\sqrt{\boxed{\text{エ}}}$$

であり, $S = \boxed{\text{オカ}}\sqrt{\boxed{\text{キ}}}$ である。

(数学Ⅰ第4問は次ページに続く。)

(2) $S = 8\sqrt{3}$ ならば，$mn = \boxed{クケ}$ である。このとき

$m = \boxed{コ}$，$n = \boxed{サ}$

または

$m = \boxed{シ}$，$n = \boxed{ス}$

である。ただし，$\boxed{コ} < \boxed{シ}$ とする。

(3) 等式

$$\alpha^2\beta^2 + \frac{\alpha^2}{\beta^2} + \frac{\beta^2}{\alpha^2} + \frac{1}{\alpha^2\beta^2} = 500$$

が成り立つのは，$m = \boxed{セ}$，$n = \boxed{ソタ}$ のときである。