数　学　Ⅱ

(全　問　必　答)

第１問　(配点　30)

〔1〕　$-\frac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq 0$ のとき，関数

$$y = \cos 2\theta + \sqrt{3}\sin 2\theta - 2\sqrt{3}\cos\theta - 2\sin\theta$$

の最小値を求めよう。

$t = \sin\theta + \sqrt{3}\cos\theta$ とおくと

$$t^2 = \boxed{\text{ア}}\cos^2\theta + \boxed{\text{イ}}\sqrt{\boxed{\text{ウ}}}\sin\theta\cos\theta + \boxed{\text{エ}}$$

であるから

$$y = t^2 - \boxed{\text{オ}}\,t - \boxed{\text{カ}}$$

となる。また

$$t = \boxed{\text{キ}}\sin\left(\theta + \frac{\pi}{\boxed{\text{ク}}}\right)$$

である。

(数学Ⅱ第１問は次ページに続く。)

$\theta + \dfrac{\pi}{\boxed{\text{ク}}}$ のとり得る値の範囲は

$$-\frac{\pi}{\boxed{\text{ケ}}} \leqq \theta + \frac{\pi}{\boxed{\text{ク}}} \leqq \frac{\pi}{\boxed{\text{ク}}}$$

であるから，t のとり得る値の範囲は

$$\boxed{\text{コサ}} \leqq t \leqq \sqrt{\boxed{\text{シ}}}$$

である。したがって，y は $t = \boxed{\text{ス}}$，すなわち $\theta = -\dfrac{\pi}{\boxed{\text{セ}}}$ のとき，

最小値 $\boxed{\text{ソタ}}$ をとる。

(数学Ⅱ第１問は次ページに続く。)

〔2〕 自然数 x で，条件

$$12(\log_2\sqrt{x})^2-7\log_4 x-10>0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

$$x+\log_3 x<14 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

を満たすものを求めよう。

まず，x を正の実数として，条件①を考える。①は $X=\log_2 x$ とおくと

$$6X^2-\boxed{\text{チ}}\,X-\boxed{\text{ツテ}}>0$$

となる。この2次不等式を解くと

$$X<-\frac{\boxed{\text{ト}}}{\boxed{\text{ナ}}},\quad \frac{\boxed{\text{ニ}}}{\boxed{\text{ヌ}}}<X$$

となる。したがって，条件①を満たす最小の自然数 x は $\boxed{\text{ネ}}$ であり，$\boxed{\text{ネ}}$ 以上のすべての自然数 x は①を満たす。

（数学Ⅱ第1問は次ページに続く。）

次に，条件 ② について考えると，② を満たす最大の自然数 x は $\boxed{\text{ノハ}}$ であり，$\boxed{\text{ノハ}}$ 以下のすべての自然数 x は ② を満たす。

したがって，求める x は $\boxed{\text{ネ}}$ 以上 $\boxed{\text{ノハ}}$ 以下の自然数である。

数学Ⅱ

第2問 (配点 30)

座標平面上で，放物線 $y = x^2$ を C とする。

曲線 C 上の点Pの x 座標を a とする。点Pにおける C の接線 ℓ の方程式は

$$y = \boxed{\text{アイ}}\,x - a^{\boxed{\text{ウ}}}$$

である。$a \neq 0$ のとき直線 ℓ が x 軸と交わる点をQとすると，Qの座標は

$$\left(\frac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オ}}},\ \boxed{\text{カ}}\right)$$

である。

$a > 0$ のとき，曲線 C と直線 ℓ および x 軸で囲まれた図形の面積を S とすると

$$S = \frac{a^{\boxed{\text{キ}}}}{\boxed{\text{クケ}}}$$

である。

$a < 2$ のとき，曲線 C と直線 ℓ および直線 $x = 2$ で囲まれた図形の面積を T とすると

$$T = -\frac{a^3}{\boxed{\text{コ}}} + \boxed{\text{サ}}\,a^2 - \boxed{\text{シ}}\,a + \frac{\boxed{\text{ス}}}{\boxed{\text{セ}}}$$

である。

(数学Ⅱ第2問は次ページに続く。)

$a=0$のときは$S=0$，$a=2$のときは$T=0$であるとして，$0 \leqq a \leqq 2$に対して$U=S+T$とおく。aがこの範囲を動くとき，Uは$a=\boxed{\text{ソ}}$で最大値$\dfrac{\boxed{\text{タ}}}{\boxed{\text{チ}}}$をとり，$a=\dfrac{\boxed{\text{ツ}}}{\boxed{\text{テ}}}$で最小値$\dfrac{\boxed{\text{ト}}}{\boxed{\text{ナニ}}}$をとる。

第3問 (配点 20)

Oを原点とする座標平面上に正六角形OABCDEがある。ただし，頂点は時計の針の回転と逆の向きにO，A，B，C，D，Eの順に並んでいるものとする。また，直線OAの方程式は $y = 3x$，直線BEの方程式は $y = 3x + 2$ であるとする。点A，Dの座標と正六角形OABCDEの外接円の方程式を求めよう。

原点を通り，直線OAに垂直な直線 ℓ の方程式は

$$y = -\frac{1}{\boxed{\text{ア}}}x$$

であり，直線CDの方程式は $y = \boxed{\text{イ}}\,x + \boxed{\text{ウ}}$ である。Dは ℓ と直線CDの交点であるから，Dの座標は

$$\left(-\frac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オ}}},\ \frac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{オ}}}\right)$$

である。

(数学Ⅱ第3問は次ページに続く。)

また，OA：OD = 1 ： $\sqrt{\boxed{\text{キ}}}$ であるから OA $= \dfrac{2\sqrt{\boxed{\text{クケ}}}}{\boxed{\text{コサ}}}$ であり，

A の座標は

$$\left(\frac{2\sqrt{\boxed{\text{シ}}}}{\boxed{\text{スセ}}},\ \frac{2\sqrt{\boxed{\text{シ}}}}{\boxed{\text{ソ}}}\right)$$

となる。外接円の中心は線分 AD の中点で，その半径は正六角形 OABCDE の 1 辺の長さに等しいから，外接円の方程式は

$$\left(x+\frac{\boxed{\text{タ}}-\sqrt{\boxed{\text{シ}}}}{\boxed{\text{スセ}}}\right)^2+\left(y-\frac{\boxed{\text{チ}}+\sqrt{\boxed{\text{シ}}}}{\boxed{\text{ソ}}}\right)^2=\frac{\boxed{\text{ツ}}}{\boxed{\text{テト}}}$$

である。

第4問 (配点 20)

a, b は実数で, $P(x)$ と $Q(x)$ はそれぞれ2次と3次の整式であるとする。$Q(x)$ は $P(x)$ で割り切れて, 商が $x+a$ であるとする。このとき

$$Q(x)=\left(x+\boxed{\text{ア}}\right)P(x)$$

が成り立つ。さらに, $\{P(x)\}^2$ を $Q(x)$ で割ったとき, 商が $x+b$, 余りが $P(x)$ であるとする。このとき

$$\{P(x)\}^2=\left(x+\boxed{\text{イ}}\right)Q(x)+P(x)$$

が成り立つ。上の二つの等式から

$$\{P(x)\}^2=\left\{\left(x+\boxed{\text{ア}}\right)\left(x+\boxed{\text{イ}}\right)+\boxed{\text{ウ}}\right\}P(x)$$

となる。したがって

$$P(x)=x^2+\left(a+\boxed{\text{エ}}\right)x+\boxed{\text{オ}}\,b+\boxed{\text{カ}}$$

である。

(数学Ⅱ第4問は次ページに続く。)

方程式 $Q(x)=0$ の三つの解を α, β, γ とする。

$\alpha+\beta+\gamma=-5$ のとき

$$b=\boxed{\text{キク}}\,a+\boxed{\text{ケ}} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

であり，このとき，$Q(x)=0$ が虚数解をもつような a のとり得る値の範囲は

$$\boxed{\text{コ}}<a<\frac{\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シ}}}$$

である。

一方，$\alpha\beta\gamma=-6$ のとき

$$b=\frac{-a+\boxed{\text{ス}}}{a^{\boxed{\text{セ}}}} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

である。

① と ② がともに成り立つとき

$$\boxed{\text{ソ}}\,a^3-\boxed{\text{タ}}\,a^2-a+\boxed{\text{チ}}=0 \qquad \cdots\cdots\cdots ③$$

であり，③ を満たす a の値は

$$\boxed{\text{ツテ}},\quad \frac{\boxed{\text{ト}}}{\boxed{\text{ナ}}},\quad \boxed{\text{ニ}}$$

の三つである。このうち $Q(x)=0$ が虚数解をもつような a の値は $\boxed{\text{ヌ}}$ 個ある。