数　学　Ⅱ

（全 問 必 答）

第1問 （配点　30）

〔1〕 Oを原点とする座標平面上に2点A(6, 0), B(3, 3)をとり，線分ABを2：1に内分する点をP，1：2に外分する点をQとする。3点O, P, Qを通る円をCとする。

(1) Pの座標は$\left(\boxed{\text{ア}},\ \boxed{\text{イ}}\right)$であり，Qの座標は$\left(\boxed{\text{ウ}},\ \boxed{\text{エオ}}\right)$である。

(2) 円Cの方程式を次のように求めよう。線分OPの中点を通り，OPに垂直な直線の方程式は

$$y = \boxed{\text{カキ}}\,x + \boxed{\text{ク}}$$

であり，線分PQの中点を通り，PQに垂直な直線の方程式は

$$y = x - \boxed{\text{ケ}}$$

である。

（数学Ⅱ第1問は次ページに続く。）

これらの2直線の交点が円 C の中心であることから，円 C の方程式は

$$\left(x-\boxed{\text{コ}}\right)^2+\left(y+\boxed{\text{サ}}\right)^2=\boxed{\text{シス}}$$

であることがわかる。

(3) 円 C と x 軸の二つの交点のうち，点Oと異なる交点をRとすると，Rは線分OAを $\boxed{\text{セ}}$ ：1に外分する。

（数学Ⅱ第1問は次ページに続く。）

〔2〕 連立方程式

$$(*)\quad \begin{cases} x+y+z=3 \\ 2^x+2^y+2^z=\dfrac{35}{2} \\ \dfrac{1}{2^x}+\dfrac{1}{2^y}+\dfrac{1}{2^z}=\dfrac{49}{16} \end{cases}$$

を満たす実数 x，y，z を求めよう。ただし，$x \leqq y \leqq z$ とする。

$X=2^x$，$Y=2^y$，$Z=2^z$ とおくと，$x \leqq y \leqq z$ により $X \leqq Y \leqq Z$ である。

(＊)から，X，Y，Z の関係式

$$\begin{cases} XYZ=\boxed{\text{ソ}} \\ X+Y+Z=\dfrac{35}{2} \\ XY+YZ+ZX=\dfrac{\boxed{\text{タチ}}}{\boxed{\text{ツ}}} \end{cases}$$

が得られる。

(数学Ⅱ第1問は次ページに続く。)

この関係式を利用すると，t の 3 次式 $(t-X)(t-Y)(t-Z)$ は

$$(t-X)(t-Y)(t-Z)=t^3-(X+Y+Z)t^2+(XY+YZ+ZX)t-XYZ$$

$$=t^3-\frac{35}{2}t^2+\frac{\boxed{\text{タチ}}}{\boxed{\text{ツ}}}t-\boxed{\text{ソ}}$$

$$=\left(t-\frac{1}{2}\right)\left(t-\boxed{\text{テ}}\right)\left(t-\boxed{\text{トナ}}\right)$$

となる。したがって，$X\leqq Y\leqq Z$ により

$$X=\frac{1}{2},\quad Y=\boxed{\text{テ}},\quad Z=\boxed{\text{トナ}}$$

となり，$x=\log_{\boxed{\text{ニ}}}X$，$y=\log_{\boxed{\text{ニ}}}Y$，$z=\log_{\boxed{\text{ニ}}}Z$ から

$$x=\boxed{\text{ヌネ}},\quad y=\boxed{\text{ノ}},\quad z=\boxed{\text{ハ}}$$

であることがわかる。

数学Ⅱ

第2問 (配点 30)

a を正の実数として，x の関数 $f(x)$ を

$$f(x) = x^3 - 3a^2x + a^3$$

とする。

関数 $y = f(x)$ は，$x = \boxed{\text{アイ}}$ で極大値 $\boxed{\text{ウ}}\,a^{\boxed{\text{エ}}}$ をとり，$x = \boxed{\text{オ}}$ で極小値 $\boxed{\text{カ}}\,a^{\boxed{\text{キ}}}$ をとる。このとき，2点

$$\left(\boxed{\text{アイ}},\ \boxed{\text{ウ}}\,a^{\boxed{\text{エ}}}\right),\ \left(\boxed{\text{オ}},\ \boxed{\text{カ}}\,a^{\boxed{\text{キ}}}\right)$$

と原点を通る放物線

$$y = \boxed{\text{ク}}\,x^2 - \boxed{\text{ケ}}\,a^{\boxed{\text{コ}}}x$$

を C とする。原点における C の接線 ℓ の方程式は

$$y = \boxed{\text{サシ}}\,a^{\boxed{\text{ス}}}x$$

である。また，原点を通り ℓ に垂直な直線 m の方程式は

$$y = \frac{1}{\boxed{\text{セ}}\,a^{\boxed{\text{ソ}}}}x$$

である。

(数学Ⅱ第2問は次ページに続く。)

x 軸に関して放物線 C と対称な放物線

$$y = -\boxed{\text{ク}}\,x^2 + \boxed{\text{ケ}}\,a^{\boxed{\text{コ}}}x$$

を D とする。D と ℓ で囲まれた図形の面積 S は

$$S = \frac{\boxed{\text{タチ}}}{\boxed{\text{ツ}}}\,a^{\boxed{\text{テ}}}$$

である。

放物線 C と直線 m の交点の x 座標は，0 と $\dfrac{4a^{\boxed{\text{ト}}}+1}{2a^{\boxed{\text{ナ}}}}$ である。C と m で囲まれた図形の面積を T とする。$S = T$ となるのは $a^{\boxed{\text{テ}}} = \dfrac{\boxed{\text{ニ}}}{\boxed{\text{ヌ}}}$ のときであり，このとき，$S = \dfrac{\boxed{\text{ネ}}}{\boxed{\text{ノ}}}$ である。

第3問 （配点　20）

a を $0 < a < \frac{\pi}{2}$ を満たす定数とし，x の関数 $f(x)$ を

$$f(x) = \sin(x-2a) + \sin(x-a) + \sin x + \sin(x+a) + \sin(x+2a) \quad \cdots\cdots ①$$

とする。

(1)　加法定理を用いると

$$f(x) = \left(\boxed{\text{ア}} + \boxed{\text{イ}}\cos a + \boxed{\text{ウ}}\cos 2a\right)\sin x$$

となる。さらに，2倍角の公式を用いると

$$f(x) = \left(\boxed{\text{エオ}} + \boxed{\text{カ}}\cos a + \boxed{\text{キ}}\cos^2 a\right)\sin x \quad \cdots\cdots ②$$

となる。

(2)　すべての実数 x に対して $f(x) = 0$ が成り立つ場合を考える。このとき，a の値を求めよう。

まず，② により，すべての実数 x に対して $f(x) = 0$ が成り立つのは

$$\boxed{\text{エオ}} + \boxed{\text{カ}}\cos a + \boxed{\text{キ}}\cos^2 a = 0$$

のときである。よって，$0 < a < \frac{\pi}{2}$ から

$$\cos a = \frac{\boxed{\text{クケ}} + \sqrt{\boxed{\text{コ}}}}{\boxed{\text{サ}}} \quad \cdots\cdots ③$$

であるので，すべての実数 x に対して $f(x) = 0$ が成り立つような a がただ一つ定まることがわかる。

（数学Ⅱ第3問は次ページに続く。）

次に，すべての実数 x に対して $f(x)=0$ であるから，特に，$x=\dfrac{a}{2}$ のとき，

$f\left(\dfrac{a}{2}\right)=0$ である。これにより，① から，$\sin\left(\dfrac{\boxed{\text{シ}}}{\boxed{\text{ス}}}a\right)=0$ がわかる。

したがって，$0<a<\dfrac{\pi}{2}$ に注意すると，$a=\dfrac{\boxed{\text{セ}}}{\boxed{\text{ソ}}}\pi$ である。

(3) $a=\dfrac{\boxed{\text{セ}}}{\boxed{\text{ソ}}}\pi$ のときの $\cos\dfrac{a}{2}$ の値を求めよう。まず，$a=\dfrac{\boxed{\text{セ}}}{\boxed{\text{ソ}}}\pi$ のとき，③ が成り立つから

$$\cos 2a=-\frac{\boxed{\text{タ}}+\sqrt{\boxed{\text{チ}}}}{\boxed{\text{ツ}}}$$

であることがわかる。したがって，$\cos\dfrac{a}{2}=-\cos\left(\pi-\dfrac{a}{2}\right)$ を利用すると

$$\cos\frac{a}{2}=\frac{\boxed{\text{テ}}+\sqrt{\boxed{\text{ト}}}}{\boxed{\text{ナ}}}$$

である。

第4問 (配点 20)

p，q を実数として，x の 3 次式 $f(x)$ を

$$f(x) = x^3 + px^2 + qx + 30$$

とする。

(1) $f(x)$ の x に虚数 $3+i$ を代入すると

$$f(3+i) = \boxed{\text{ア}}\,p + \boxed{\text{イ}}\,q + 48 + \left(\boxed{\text{ウ}}\,p + q + \boxed{\text{エオ}}\right)i$$

となる。

(2) 3 次方程式 $f(x) = 0$ の一つの解が $3+i$ であるとき，他の解を求めよう。

$3+i$ が方程式 $f(x) = 0$ の解であるから

$$\boxed{\text{ア}}\,p + \boxed{\text{イ}}\,q + 48 = 0, \qquad \boxed{\text{ウ}}\,p + q + \boxed{\text{エオ}} = 0$$

となり，p，q の値は

$$p = -\boxed{\text{カ}}, \quad q = -\boxed{\text{キ}}$$

である。このとき，$f(x)$ を因数分解すると

$$f(x) = \left(x + \boxed{\text{ク}}\right)\left(x^2 - \boxed{\text{ケ}}\,x + \boxed{\text{コサ}}\right)$$

となり，方程式 $f(x) = 0$ の他の解は

$$\boxed{\text{シス}}, \quad \boxed{\text{セ}} - i$$

である。

(数学Ⅱ第4問は次ページに続く。)

(3)　3 次方程式 $f(x)=0$ が実数解 -5 と二つの虚数解 α, β をもつとする。このとき, $\alpha^2+\beta^2$ を p を用いて表し, $\alpha^2+\beta^2$ のとり得る値の範囲を求めよう。

-5 が方程式 $f(x)=0$ の解であることから

$$q=5p-\boxed{\text{ソタ}}$$

が成り立つ。したがって, $f(x)$ は p を用いて

$$f(x)=(x+5)\left\{x^2+\left(p-\boxed{\text{チ}}\right)x+\boxed{\text{ツ}}\right\}$$

と表される。このとき, 方程式

$$x^2+\left(p-\boxed{\text{チ}}\right)x+\boxed{\text{ツ}}=0$$

が虚数解 α, β をもつような p のとり得る値の範囲は

$$\boxed{\text{テ}}-\boxed{\text{ト}}\sqrt{\boxed{\text{ナ}}}<p<\boxed{\text{テ}}+\boxed{\text{ト}}\sqrt{\boxed{\text{ナ}}}\quad\cdots\text{①}$$

である。

解と係数の関係により, $\alpha^2+\beta^2$ は p を用いて

$$\alpha^2+\beta^2=p^2-\boxed{\text{ニヌ}}p+\boxed{\text{ネノ}}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\text{②}$$

と表される。

したがって, ① と ② により, $\alpha^2+\beta^2$ のとり得る値の範囲は

$$\boxed{\text{ハヒフ}}\leqq\alpha^2+\beta^2<\boxed{\text{ヘホ}}$$

である。